Teoría de Números

NUMEROS PRIMOS

Un número entero *P* es primo si es un número mayor que 1 y los únicos enteros que lo dividen son 1, -1, *P* y *–P*. A los números de la forma *–P* donde es un primo les llamaremos primos negativos

Por ejemplo: 5, es divisible por (1, -1, 5, -5), primo positivo.
-5, es divisible por (1, -1, 5, -5), primo negativo.

La sucesión de los números primos, (positivos), comienza con:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...

Hay infinitos números primos, es decir, existen números primos tan grandes como se quiera. La distribución de los números primos es muy irregular. Hay algunos que son números impares consecutivos, como 3 y 5; estos se llaman ***primos gemelos***.

El MCD de dos enteros *a y b* es el mayor entero positivo que divide a *a* y *b* con resto cero. Si el MCD de dos enteros es 1, se dice que los dos números son ***primos relativos*** o ***primos entre sí***. A los números que son el producto de dos o más primos les llamaremos ***compuestos***.

Teorema Fundamental de la Aritmética
Todo entero n > 1 puede descomponerse de manera única como un producto de potencias de números primos de la siguiente manera:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots . p_n^{a_n}$$

donde las $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son primos tal que: $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos.

Por ejemplo:
$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
$825 = 3 \times 5^2 \times 11$
$46137 = 3 \times 7 \times 13^3$

DIVISIBILIDAD

Un número es divisible entre otro cuando lo contiene exactamente un número entero de veces. *En otras palabras si un número divide a otro número, el cociente debe ser exacto*.

Definición. Sean *a* y *b* dos números enteros. Decimos que *a* divide a *b* (lo que simbolizamos con $a \mid b$) si existe un entero *c* tal que $b = (a)(c)$

Esto equivale a decir, que *b* es múltiplo de *a*. O que la división $b \div a$ no deja residuo. Si *a* no divide a *b*, escribimos $a \nmid b$. Esto es lo mismo que decir que la división $b \div a$ deja residuo.

Ejemplos:

$3 \mid 12$ pues $12 = 4 \times 3$
$4 \nmid 10$ ya que no existe un entero c tal que 10 = 4c.
$4 \mid 20$ ya que si c = 5, 20 = 4c.

$3|0$ dado que $0 = 3c$ cuando $c = 0$.
$1|\ 5$ puesto que $5 = 1\times 5$
$5\nmid 1$ dado que $1 \neq 5c$ para cualquier entero c.
Para cualquier entero a, $a+1 \mid a^2 - 1$. Ya que $a^2 - 1 = (a+1)\times k$, con $k = a - 1$.

Criterios de divisibilidad
A continuación damos algunos criterios de divisibilidad que facilitan la búsqueda de los factores primos.

<u>Divisibilidad por 2</u>
Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o cifra par.
<u>Divisibilidad por 3</u>
Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3. Por ejemplo: 168351 es divisible por 3 pues 1 + 6 + 8+ 3 + 5 + 1 = 24, el cuál es múltiplo de 3.

<u>Divisibilidad por 5</u>
Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en cinco.

<u>Divisibilidad por 7</u>
Un número es divisible por 7 cuando separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 7.

Veamos un ejemplo: ¿2401 es divisible por 7?
240_1 x 2 = 2,   240 - 2 = 238,   23_8 x 2 = 16,   23 - 16 = 7.
Entonces, 2041 sí es divisible por 7. Verifiquemos:
2401 / 7 = 343.

<u>Divisibilidad por 11</u>
Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan un lugar impar, y la suma de los dígitos de lugar par, (puede ser de derecha izquierda ó inversamente es decir, que la diferencia pudiera dar negativa), es cero o múltiplo de 11.

Por ejemplo. Veamos si 94378 es divisible por 11:
9<u>4</u>3<u>7</u>, de derecha a izquierda:
Pares (subrayados): 4 y 7,   4 + 7 = 11
Impares: 9, 3 y 8,   9 + 3 = 12
Impares - Pares = 12 - 11 = 1, luego 9437 no es divisible por 11. (Verifíquelo)

<u>Divisibilidad por 13, 17 y 19</u>
El método para investigar la divisibilidad por 13, 17 y 19 es similar al de la divisibilidad por 7, sólo que al separar la primera cifra de la derecha, ésta se multiplica por 9, 5 y 17 respectivamente; siendo un número divisible por 13, 17 y 19 si al final del proceso sobra un cero o un múltiplo de 13, cero o un múltiplo de 17, cero o un múltiplo de 19.

Ejemplo. Investigar la divisibilidad de 1501.

Con 13:
150_1 x 9 = 9,   150 - 9 = 141,   14_1 x 9 = 9,   14 - 9 = 5, por lo tanto no es divisible por 13.

Con 17:
150_1 x 5 = 5,   150 - 5 = 145,   14_5 x 5 = 25,   14 - 25 = -11.
No es divisible por 17.

150_1 x 17 = 17,   150 - 17 = 133,   13_3 x 17 = 51,   13 - 51 = -38.

Si es divisible por 19. Verifiquemos:
1501 / 19 = 79.

MINIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM) Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

En ocasiones es conveniente conocer el menor de los múltiplos comunes (MCM), y el mayor de los divisores comunes (MCD) de varios números enteros. La regla de obtener dichos números es:

Para encontrar el MCM de varios números enteros se multiplican los factores primos comunes y no comunes de los números tomados con sus mayores exponentes.

Para encontrar el MCD de varios números enteros se multiplican los factores primos comunes de los números tomados con sus menores exponentes.

Si m es el MCD de a y b esto se denotará por m = (a, b); otra manera de calcular el MCD es usando el ***algoritmo de Euclides***, el cual se basa en la siguiente propiedad:

Si $m = (a, b)$ y $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$, entonces $m = (b, r)$.
y consiste en lo siguiente:

Dividimos $a \div b$ obteniendo un residuo r_1, después dividimos $b \div r_1$ y obtenemos un residuo r_2, a continuación dividimos $r_1 \div r_2$ obteniendo un residuo r_3, y así sucesivamente hasta llegar a un residuo cero, el MCD de a y b será el último residuo diferente de cero.

El algoritmo de Euclides se incluye aquí debido a su utilidad en la demostración de algunos teoremas importantes de la divisibilidad entre enteros.

Ejemplos. Usando el ***algoritmo de Euclides***, encontrar el MCD de:
328 y 1804; 105 y 385

a) 1804 / 328 = 5 y resto = 164
328 / 164 = 2 y resto = 0   Por lo tanto (1804, 328) = 164

b) 385 / 105 = 3 y resto = 70
105 / 70 = 1 y resto = 35
70 / 35 = 2 y resto = 0   Por lo tanto (385, 105) = 35

Otra propiedad importante del MCD es que:
Si $a > b$ $(a, b) = (b, a - b)$.

Ejemplo. Calcular (1001,1000)
Solución: (1001,1000) = (1000,1001 –1000) = (1000,1) = 1.

CONGRUENCIAS

Con el fin de motivar el concepto de **congruencia**, analizaremos los siguientes dos problemas.

Ejemplo 1. Se tiene un edificio de dos pisos con los cuartos numerados como en la siguiente figura:

Piso 2	2	4	6	8	.	.	.	.	.	.	.	.
Piso 1	1	3	5	7	.	.	.	.	.	.	.	.

¿En que piso localizamos el cuarto No. 98?

Solución: Localizamos el cuarto 98 en el piso 2, pues claramente observamos que en el primer piso están los cuartos con números impares y en el segundo piso los de números pares.

Ejemplo 2. Se tiene un edificio de cinco pisos con los cuartos numerados como en la siguiente figura:

Piso 5	4	9	14	19	24	…	.	.	.	.	.	.
Piso 4	3	8	13	18	23	…	.	.	.	.	.	.
Piso 3	2	7	12	17	22	…	.	.	.	.	.	.
Piso 2	1	6	11	16	21	…	.	.	.	.	.	.
Piso 1	0	5	10	15	20	…	.	.	.	.	.	.

¿En qué piso localizamos el cuarto No. 98?

Solución: En el problema anterior, por su sencillez, pudimos mentalmente dividir al conjunto de los enteros (positivos) en dos clases ajenas: pares e impares. En este segundo problema tenemos que dividirlos en 5 clases ajenas y ser capaces de ubicar a cualquier entero en alguna de ellas.

Si observamos detenidamente la figura, podemos ubicar a los cuartos de la siguiente manera:

Piso Núm..	*Característica*	*Forma*
5	Los que exceden en cuatro unidades a un múltiplo de 5	5k+4
4	Los que exceden en tres unidades a un múltiplo de 5	5k+3
3	Los que exceden en dos unidades a un múltiplo de 5	5k+2
2	Los que exceden en una unidad a un múltiplo de 5	5k+1
1	Múltiplos de 5	5k

Nota: k = 0, 1, 2,3,...

Después de este pequeño análisis, podemos decir que el cuarto No. 98 se encuentra en el cuarto piso, puesto que 98 = 5(19) + 3.

Obsérvese que los del primer piso son aquellos que al dividirse entre 5 dejan residuo cero, los del segundo piso son aquellos que al dividirse entre 5 dejan residuo 1 y así sucesivamente.

Si consideramos el *conjunto de los enteros*, con este criterio podemos dividirlos en 5 clases:

C_0 = {…,-15, -10, -5, **0**, 5, 10, 15,…}
C_1 = {…, -14, -9, -4, **1**, 6, 11, 16,…}
C_2 = {…, -13, -8, -3, **2**, 7, 12, 17,…}
C_3 = {…, -12, -7, -2, **3**, 8, 13, 18,…}
C_4 = {…, -11, -6, -1, **4**, 9, 14, 119,…}.

La característica de la clase C_r es que al dividirse cualquiera de sus elementos entre cinco, deja residuo r.

Si dos enteros pertenecen a la misma clase, diremos que ellos son congruentes módulo 5 en este ejemplo.

Definición. Decimos que los enteros a y b son congruentes módulo m, m >0 si al dividirse entre m dejan el mismo residuo, y lo denotaremos como
$a \equiv b$ (mod m).

Teorema 1. $a \equiv b$ (mod m) si y sólo si m|b-a.

Teorema 2. La relación congruencia módulo m tiene las siguientes propiedades:
1. $a \equiv a$ (mod m).
2. Si $a \equiv b$ (mod m) entonces $b \equiv a$ (mod m).
3. Si $a \equiv b$ (mod m) y $b \equiv c$ (mod m) entonces $a \equiv c$ (mod m).

Es de esperarse, en vista del teorema anterior, que las congruencias se comporten en muchos aspectos como igualdades. Esta semejanza queda ilustrada en el siguiente teorema:

Teorema 3. Sean a, b, c enteros y m entero positivo.

1. Si $a \equiv b$ (mod m) entonces:
   a) $a + x \equiv b + x$ (mod m) para todo entero x.
   b) $ax \equiv bx$ (mod m) para todo entero x.

2. Si $a \equiv b$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces:
   a) $a + c \equiv b + d$ (mod m).
   b) $a-c \equiv b-d$ (mod m).
   c) $ac \equiv bd$ (mod m).
   d) $a^n \equiv b^n$ (mod m) para todo entero positivo n.

Ejemplo.
Al dividir los números 3, 13, 23, 33 entre 10, sobra 3 por lo que decimos que ellos son congruentes modulo 10.

Para ilustrar una parte del teorema 3 utilizamos $3 \equiv 13$ (mod $_{10}$) y $23 \equiv 33$ (mod $_{10}$). Entonces podemos sumar las congruencias como lo indica el teorema y resulta otra congruencia.

Sumando obtenemos $3 + 23 \equiv 13 + 33 \pmod{10}$.

Esto es lo mismo que $26 \equiv 46 \pmod{10}$. Podemos ver que 26 y 46 son congruentes módulo 10, ya que al dividirlos entre 10 dejan residuo 6.

EJERCICIOS

1. Alicia va al club cada día, Beatriz va cada 2 días, Carlos va cada 3, Daniel cada 4, Enrique cada 5, Francisco cada 6 y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿Dentro de cuántos días volverán a reunirse?

2. En un concurso de baile los jueces califican a los competidores con números enteros. El promedio de las calificaciones de un competidor es 5.625. ¿Cuál es el número mínimo de jueces para que eso sea posible?

3. La maestra distribuyó la misma cantidad de dulces entre cada uno de 5 niños y se quedó tres para ella misma. No se acuerda cuántos dulces tenía, pero se acuerda que era un múltiplo de 6 entre 65 y 100. ¿Cuántos dulces tenía?

4. 96 niños en un campamento de verano van a separarse en grupos de forma que cada grupo tenga el mismo número de niños. ¿De cuántas maneras puede hacerse la separación si cada grupo debe de tener más de 5 pero menos de 20 niños?

5. Al hacer la división de 1 entre 5^{2000}, ¿cuál será el último dígito que aparezca antes de llegar a puros ceros?

6. Un número entero positivo es múltiplo de exactamente 8 enteros positivos (incluyendo a él mismo y a la unidad). Si es múltiplo de 21 y de 35, ¿cuál es el número?

7. A Julio le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es la tercera cifra de su número secreto?

8. ¿Cuántos números múltiplos de 6 menores que 1000 tienen la propiedad de que la suma de sus cifras es 21?

9. Un niño corta un cuadrado de tres días por tres días de la página de un calendario. Si la suma de las nueve fechas es divisible entre 10 y sabemos que la fecha de la esquina superior izquierda es múltiplo de 4, ¿cuál es la fecha de la esquina inferior derecha?

10. ¿Cuántas parejas de enteros positivos a y b satisfacen que $a^2 - b^2 = 15$?

11. Una sucesión se forma de la manera siguiente: el primer término es 2 y cada uno de los términos siguientes se obtiene del anterior elevándolo al cuadrado y restándole 1 (los primeros términos son 2, $2^2 - 1 = 3$, $3^2 - 1 = 8$, $8^2 - 1 = 63$, ...). La cantidad de números primos que hay en la sucesión es:

12. ¿Cuál de los siguientes números es más grande?

(a) 2^{12} (b) 4^{15} (c) 8^{11} (d) 12^8 (e) 32^6

13. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{1998} \times 5^{2002}$?

14. Andrés cuenta los números del 1 al 100 y aplaude si el número que dice es múltiplo de 3 o termina en 3. ¿Cuántas veces aplaudirá Andrés en total?

15. La suma de todos los dígitos del número $10^{99} - 99$ es:

16. Una "operación" consiste en multiplicar el número por 3 y sumarle 5, comenzando por el número 1. ¿Cuál es el dígito de las unidades después de aplicar la operación 1999 veces?

17. ¿Para qué valores enteros positivos de n la expresión $\frac{18}{n+4}$ es un entero?

18. Si m y n son enteros tales que $2m - n = 3$. Pruebe que $m - 2n$ es múltiplo de 3.

19. ¿Cuántas veces aparece el factor 2 en la descomposición en números primos de $1 + 2 + 3 + \ldots + 10^{11}$?

20. Si (a, b) denota al MCD de a y b, ¿cuánto vale (a^4-b^4, a^2-b^2)?

21. Un sistema de engranes consta de tres ruedas dentadas, el engrane A tiene 4 dientes, el B tiene 6 dientes y el C tiene 8 dientes. En el engrane A se encuentra un motor que mueve todo el sistema.

a. ¿Cuántas vueltas debe dar el engrane A para que los engranes vuelvan a su posición original?

b. Cada engrane está conectado a una máquina que lleva el registro de cuántas vueltas completas ha dado su engrane; al momento en que la suma de los registros de las tres máquinas es 1997, ¿cuánto marca el registro de A?

22. Encuentre todas las parejas de números enteros a y b, tales que $a^2 - 10b^2 = 2$.

23. Encuentre dos números sin ceros y cuyo producto sea
1 000 000 000.

24. Sea $a = bq + r$. Si $c|a$ y $c|b$, pruebe que $c|r$.

25. Pruebe que n es par si y sólo si n^2 es par. Nótese que los números pares son precisamente los múltiplos de 2 y por lo tanto que n sea par significa que $n = 2k$ para algún k número entero.

26. Pruebe que $n^2 - n$ es par para todo entero n.

27. Pruebe que todo número primo de la forma $3k + 1$ también es de la forma $6k + 1$.

28. Demuestre que si n es impar entonces $8 \mid n^2 - 1$.

29. Una sala de cine tiene 26 filas con 24 asientos cada una. El total de los asientos se numera de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 375?

30. ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 7^{1998}?

a) 01 b) 07 c) 43 d) 49

31. Una escalera tiene numerados los escalones como 0, 1, 2, 3, 4,.... Una rana está en el escalón 0, salta 5 hacia arriba al escalón 5 y luego dos para abajo hasta el escalón 3, después sigue saltando alternando 5 para arriba y dos para abajo. La sucesión de escalones que pisa la rana es 0, 5, 3, 8, 6,... ¿Cuál de los siguientes escalones *no pisa* la rana?

a) 1997 b) 1998 c) 1999 d) 2000

COMBINATORIA

UNA COMIDA GRATIS

Diez jóvenes decidieron celebrar la terminación de sus estudios en la escuela secundaria con un almuerzo en un restaurante. Una vez reunidos, se entabló entre ellos una discusión sobre el orden en que habían de sentarse a la mesa. Unos propusieron que la colocación fuera por orden alfabético; otros, con arreglo a la edad; otros, por los resultados de los exámenes; otros, por la estatura, etc. La discusión se prolongaba, la sopa se enfrió y nadie se sentaba a la mesa. Los reconcilió el camarero, dirigiéndoles las siguientes palabras:

- Jóvenes amigos, dejen de discutir. Siéntense a la mesa en cualquier orden y escúchenme
Todos se sentaron sin seguir un orden determinado. El camarero continuó:

- Que uno cualquiera anote el orden en que están sentados ahora. Mañana vienen a comer y se sientan en otro orden. Pasado mañana vienen de nuevo a comer y se sientan en orden distinto, y así sucesivamente hasta que hayan probado todas las combinaciones posibles. Cuando llegue el día en que ustedes tengan que sentarse de nuevo en la misma forma que ahora, les prometo solemnemente, que en lo sucesivo les convidaré a comer gratis diariamente, sirviéndoles los platos más exquisitos y escogidos.

La proposición agradó a todos y fue aceptada. Acordaron reunirse cada día en aquel restaurante y probar todos los modos distintos, posibles, de colocación alrededor de la mesa, con el objeto de disfrutar cuanto antes de las comidas gratuitas.

Sin embargo, no lograron llegar hasta ese día. Y no porque el camarero no cumpliera su palabra sino porque el número total de combinaciones diferentes alrededor de la mesa es extraordinariamente grande. Éstas son exactamente 3'628,800. Es fácil calcular, que este número de días son casi 10,000 años.

PRINCIPIOS BÁSICOS DE CONTEO

A menudo nos encontramos con preguntas del tipo ¿Qué proporción de...? ¿Cuál es la probabilidad de...? ¿De cuántas maneras se puede...?

Muchas veces, para responder, se necesita un pensamiento sistemático y un poco de información adicional; por ejemplo, ¿Cuántas rutas diferentes puedo usar para ir de Mérida a México? o ¿De cuántas maneras pueden quedar los 3 primeros puestos en una carrera de 6 caballos?

Hay técnicas y principios matemáticos útiles en situaciones variadas, pero muchas preguntas se pueden responder directamente, contando en forma sistemática, es decir, listando todos los posibles resultados en un orden sistemático, para luego contar cuántos son, o desarrollando reglas de conteo. Algunas soluciones parecen ingeniosas cuando se ven por primera vez (y muchas veces lo son) pero, como decía Juerguee Polya, cuando podemos aplicar nuevamente estos métodos ingeniosos en problemas similares y en situaciones relacionadas entre sí, hemos desarrollado una técnica.

Enunciaremos algunos principios que nos ayudarán a resolver muchísimos problemas de conteo, daremos ejemplos de cómo usar estos principios y finalmente veremos algunos métodos menos rutinarios y más ingeniosos.

Principio de Adición.

Ejemplo 1: Cinco empresas de transporte terrestre tienen servicio diario entre Mérida y México. Tres empresas de aviación tienen vuelo diario entre Mérida y México. En consecuencia, hay 5+3 maneras de ir de Mérida a México en avión o en autobús.

En los problemas de conteo, la palabra "o" se traduce en suma.

El principio general es: "**Si dos operaciones son mutuamente excluyentes (es decir, si solo una de ellas puede ocurrir) y si la primera se puede hacer de *n* maneras diferentes y la segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay *n* + *m* maneras de realizar la primera o la segunda operación.**"

Ejemplo 2: Si tengo una moneda de \$50, una de \$100, una de \$200 y una moneda de \$1000, ¿Cuál es el número total de precios que puedo pagar usando alguna o todas mis monedas?

Este es un buen ejemplo de una situación en la que se necesita un listado sistemático. Como tenemos 4 monedas, debemos considerar 4 casos. Éstos son, los precios que podemos cubrir con 1 moneda, con 2 monedas, con 3 monedas y con 4 monedas. Debemos examinar cada uno de estos casos y luego aplicar el principio de adición.

- Con 1 moneda podemos tener 4 precios: \$50, \$100, \$200 y \$1000.

- Con 2 monedas, podemos listar sistemáticamente las combinaciones:

Las que tienen \$50 son: \$50 + \$100 = \$150, \$50+\$200 = \$250, \$50 + \$1000 = \$1050
Las que tienen \$100 y no hemos listado aún: \$100 + \$200 = \$300, \$100+\$1000 = 1100
Y las que tienen \$200 y tampoco hemos listado: \$200 + \$100 = \$1200

- Con 3 monedas, listamos todas las combinaciones (una para cada moneda que falta):

\$50 + \$100 + \$200 = \$350 (falta la de \$1000)
\$100 + \$200 + \$1000 = \$1300 (falta la de \$50)

$50 + $200 + $1000 = $1250 (falta la de $100)
$50 + $100 + $1000 = $1150 (falta la de $200)

- Con las cuatro monedas

$ 50 + $100 + $200 + $1000 = $1350
Todos los precios obtenidos son diferentes, luego la respuesta es 4+6+4+1=15 precios posibles.

EJERCICIOS

1. ¿Cuántos grupos de 2 o más personas se pueden formar con 4 personas?
2. ¿Cuántos son los números enteros positivos de dos o tres dígitos?

Principio de Multiplicación.

“Si una operación se puede hacer de *n* maneras diferentes y si en cada caso, una segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay *mn* (m por n) maneras de realizar las dos operaciones”

Ejemplo 1. El menú de un restaurante ofrece 3 platos calientes y 4 postres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un almuerzo de 1 plato caliente y 1 postre?

Podríamos hacer una lista de todas las posibilidades, pero será mucho más cómodo aplicar el principio de la multiplicación:

Hay 3 maneras de elegir el plato caliente y para cada una de ellas hay 4 maneras de elegir el postre. Por lo tanto, hay $3 \cdot 4 = 12$ comidas posibles.

Ejemplo 2. ¿Cuántos códigos de una letra y un número de un dígito se pueden formar con las 26 letras del alfabeto y los números 0, 1, 2,...,9?
Podríamos listar todas las posibilidades:

A0	A1	....	A9
B0	B1	....	B9
⋮			⋮
Z0	Z1	....	Z9

hasta obtener 26 filas de 10 códigos en cada una: $26 \cdot 10 = 260$.
Es más simple utilizar el principio de multiplicación: hay 26 maneras de elegir la letra y para cada una de ellas hay 10 maneras de elegir el número, de modo que son $26 \cdot 10 = 260$ códigos.

Observemos que en los 2 ejemplos hay total libertad de elegir el segundo elemento, no importa cómo se eligió el primero. Es decir, el segundo elemento es independiente del primero.

Elegido el plato caliente, podemos elegir cualquiera de los 4 postres.

Elegida la letra podemos agregarle cualquiera de los 10 números.
Este principio es útil cuando se puede descomponer el proceso de recuento en pasos independientes.

Ejemplo 3. Del problema inicial de los 10 comensales, posiblemente a ustedes les parecerá increíble que 10 personas puedan colocarse en un número tan elevado de posiciones diferentes. Comprobemos el cálculo.
Ante todo, hay que aprender a determinar el número de combinaciones distintas, posibles. Para mayor sencillez empecemos calculando un número pequeño de objetos, por ejemplo, tres. Llamémosles A, B y C.

Deseamos saber de cuántos modos diferentes pueden disponerse, cambiando mutuamente su posición. Hagamos el siguiente razonamiento. Si se separa de momento el objeto C, los dos restantes, A y B, pueden colocarse solamente en dos formas.

Ahora agreguemos el objeto C a cada una de las parejas obtenidas. Podemos realizar esta operación tres veces:

1. Colocar C detrás de la pareja,
2. Colocar C delante de la pareja,
3. Colocar C entre los dos objetos de la pareja.

Es evidente que no son posibles otras posiciones distintas para el objeto C, a excepción de las tres mencionadas. Como tenemos dos parejas, AB y BA, el número total de formas posibles de colocación de los tres objetos será: $2 \times 3 = 6$

Ahora hagamos el cálculo para 4 objetos, llamémosles A, B, C y D, y separemos de momento uno de ellos, por ejemplo, el objeto D. Efectuemos con los otros tres todos los cambios posibles de posición. Ya sabemos que para tres, el número de cambios posibles es 6. ¿En cuántas formas diferentes podemos disponer el cuarto objeto en cada una de las 6 posiciones que resultan con tres objetos? Evidentemente, serán cuatro. Podemos:

1. Colocar D detrás del trío,
2. Colocar D delante del trío,
3. Colocar D entre el 1º y de 2º objetos,
4. Colocar D entre el 2º y 3º.

Obtenemos en total: $6 \times 4 = 24$ posiciones, pero teniendo en cuenta que $6 = 2 \times 3$ y que $2 = 1 \times 2$, entonces podemos calcular el número de cambios posibles de posición haciendo la siguiente multiplicación: $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Razonando de manera idéntica, cuando haya 5 objetos, hallaremos que el número de formas distintas de colocación será igual a: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

Para 6 objetos será: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ y así sucesivamente.

Volvamos de nuevo al caso antes citado de los 10 comensales. Sabremos el número de posiciones que pueden adoptar las 10 personas alrededor de la mesa, si nos tomamos el trabajo de calcular el producto siguiente:

$$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10$$

Resultará el número indicado anteriormente: 3’628,800.

El cálculo sería más complicado, si de los 10 comensales, 5 fueran muchachas y desearan sentarse a la mesa alternando con los muchachos. A pesar de que el número posible de combinaciones se reduciría en este caso considerablemente, el cálculo sería más complejo.

Supongamos que se sienta a la mesa, indiferentemente del sitio que elija, uno de los jóvenes. Los otros cuatro pueden sentarse, dejando vacías para las muchachas las sillas intermedias, adoptando $1\times 2\times 3\times 4=24$ formas diferentes. Como en total hay 10 sillas, el primer joven puede ocupar 10 sitios distintos. Esto significa que el número total de combinaciones posibles para los muchachos es de $10\times 24=240$.

¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse en las sillas vacías, situadas entre los jóvenes las 5 muchachas?

Evidentemente serán: $1\times 2\times 3\times 4\times 5=120$

Combinando cada una de las 240 posiciones de los muchachos, con cada una de las 120 que pueden adoptar las muchachas, obtendremos el número total de combinaciones posibles, o sea 240 x 120 = 28,800.

Este número, como vemos, es muchas veces inferior al que hemos citado antes y se necesitaría un total de 79 años. Los jóvenes clientes del restaurante, que vivieran hasta la edad de cien años, podrían asistir a una comida, servida gratis, sino por el propio camarero, al menos por uno de sus descendientes.

EJERCICIOS

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar en fila 5 estudiantes?
2. ¿De cuántas maneras puede resultar un sorteo que consta de un primer premio y un segundo premio en una clase de 25 alumnos?
3. ¿Cuántos enteros entre 100 y 999 tienen todos sus dígitos distintos?
4. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar usando sólo los dígitos 3, 7 y 8? (Incluir todos los números con dígitos repetidos).

SELECCIONES

Con frecuencia cada uno de los pasos en que se divide un proceso de recuento puede interpretarse como una elección o **selección** de ***k*** **objetos** elegidos entre los elementos de un conjunto de ***n*** **objetos.**

Dado un conjunto de “*n*” elementos puede ocurrir:

1. Que los elementos sean distintos; en este caso, a los grupos se les denomina **agrupaciones simples.**

2. Que algunos elementos sean iguales; en este caso, a los grupos se les denomina **agrupaciones con repetición**.

Considerando la naturaleza de los elementos (que sean iguales o distintos), las *agrupaciones* recibirán el nombre de *permutaciones o combinaciones simples* cuando no se repite ningún elemento y *permutaciones o combinaciones con repetición* cuando algún elemento se repite**.**

Antes de continuar debemos explicar un concepto muy útil al trabajar con estas agrupaciones o conjuntos: el concepto de *factorial***.**

Definición de factorial. Para un entero n ≥ 1, *n factorial*, expresado *n!*, se define por:
$n! = (n)\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
¿Y cual es el factorial de cero? El factorial de cero se define así: 0! = 1

Gran parte de los problemas de combinatoria pueden plantearse como una serie de pasos cada uno de los cuales consiste en elegir unos cuantos de entre ciertos elementos dados.

Es conveniente remarcar que, al hacer dicha selección, hay ocasiones en las que podremos repetir dos veces el mismo objeto (por ejemplo, queremos escribir una palabra de 4 letras, entonces debemos elegir cuatro de entre las 28 letras posibles, pero obviamente podemos repetir dos veces la misma letra, como ocurre con la palabra "CASA") y otras ocasiones en las que esto no será posible (si quiero elegir tres amigos para ir a cenar, no puedo escoger tres veces al mismo). Así mismo y dependiendo de la situación, el orden en que escojo los elementos a veces es importante y a veces no. Por ejemplo, si quiero escribir una palabra de 4 letras, el orden de las mismas influye (no es lo mismo CASA que SACA), mientras que si quiero ir a cenar con tres amigos, da igual el orden en que se los diga.
En general, siempre es más fácil resolver problemas en los que el orden es importante.

Veamos a continuación cómo se puede calcular el número de elecciones en cada caso.

PERMUTACIONES

CASO 1.- NO PODEMOS REPETIR (PERMUTACIÓN SIMPLE U ORDINARIA)
Se llama *permutación simple de n elementos tomados de k en k* ($k < n$) a los distintos grupos formados por *k* elementos de forma que:

- Los *k* elementos que forman el grupo son distintos (no se repiten)
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden).
- Aquí, no se utilizan todos los elementos.

Si elegimos un primer elemento, lo podemos hacer de *n* formas. Quitamos el elemento elegido y elegimos otro de entre los *n*-1 que quedan. Esto podrá hacerse de *n*-1 formas. Quitamos también este elemento y nos quedamos con *n*-2, de entre los que elegimos el tercero. Esto lo podremos hacer de *n*-2 formas...

Según la regla del producto, las maneras de escoger k elementos de entre un total de *n* según un determinado orden, será igual al producto de: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

Notación. $\mathbf{P_{n,k}}$ denota el número de permutaciones de *n* elementos distintos tomados de *k* en *k*.

Para llegar a una versión simplificada se opera así:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-(k-1))\bullet\frac{(n-k)(n-(k+1))...(3)(2)(1)}{(n-k)(n-(k+1))...(3)(2)(1)}=\frac{n!}{(n-k)!}=P_{n,k}$$

Ejemplo 1. $P_{10,4}$ son las permutaciones de 10 elementos agrupándolos en subgrupos de 4 elementos:

$$P_{10,4}=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=5{,}040$$

Entonces podemos formar 5,040 subgrupos diferentes de 4 elementos a partir de los 10 elementos.

Ejemplo 2. ¿Cuántas banderas diferentes, de tres franjas horizontales de igual ancho y de colores distintos, pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?
Solución:

$$P_{7,3}=\frac{7!}{4!}=210$$

Ejemplo 3. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

Al tratarse de números el orden importa y además nos dice "cifras distintas" luego no pueden repetirse:

$$P_{9,3}=9\cdot 8\cdot 7=504$$

Por tanto, se pueden formar 504 números.

En el caso especial en que $n = k$, se llama ***permutaciones de n.***
Se llaman *permutaciones de n* elementos a las diferentes agrupaciones de esos *n* elementos de forma que:

- En cada grupo intervienen los *n* elementos sin repetirse ninguno (intervienen todos los elementos).
- Dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos *n* elementos es distinto (influye el orden).

Notación: $\mathbf{P_n}$ denota el número de permutaciones de *n* elementos distintos.

$$P_n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

Ejemplo 4. P_{10} son las permutaciones de 10 elementos:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3'628{,}800$$

Es decir, tendríamos 3’628,800 formas diferentes de agrupar 10 elementos.

Ejemplo 5. Una madre tiene 3 hijos ¿de cuántas maneras distintas, nombrándolos uno por uno, puede llamarlos a cenar?
Solución: $P_3 = 3! = 6$

Ejemplo 6. Calcular las maneras posibles de colocar las letras a, b, c.

P = 3! = 6	*abc*	*acb*
	bac	*bca*
	cab	*cba*

Ejemplo 7. Con las letras de la palabra DISCO ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar?

Evidentemente, al tratarse de palabras el orden importa. Y además *n* = *m*, es decir tenemos que formar palabras de cinco letras con cinco elementos D, I, S, C, O que no están repetidos.
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Por tanto, se pueden formar 120 palabras.

CASO 2.- PODEMOS REPETIR
Este caso es análogo al Caso 1, sin más modificación que no quitar en cada paso los elementos ya escogidos. Razonando igual se llega a que el número de posibles elecciones es:
$n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$
Se llaman *Permutaciones con repetición de n elementos tomados de k en k* a los distintos grupos formados por *k* elementos de manera que:

- Los elementos que forman los grupos pueden estar repetidos.
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que éstos están colocados (influye el orden)

Notación. $\mathbf{PR_{n,\,k}}$ denota el número de permutaciones con repetición de n elementos distintos tomados de k en k

$$PR_{n,k} = n^k$$

Ejemplo 1. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos 1 y 2?

Solución: $2^3 = 8$

Ejemplo 2. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

Al tratarse de números el orden importa y además no dice nada sobre "cifras distintas", luego sí pueden repetirse.

Por tanto, se pueden formar 729 números: $PR_{9,3} = 9^3 = 729$

Ejemplo 3. ¿Cuántas palabras distintas de 10 letras (con o sin sentido) se pueden escribir utilizando sólo las letras a, b?

Al tratarse de palabras el orden importa y además como son palabras de 10 letras y sólo tenemos dos para formarlas, deben repetirse.

$$PR_{10,2} = 2^{10} = 1024$$

Por tanto, se pueden formar 1024 palabras.

CASO 3.- PODEMOS REPETIR Y EXISTEN ELEMENTOS REPETIDOS

Son permutaciones con repetición de *n* elementos, no todos distintos. Todas las agrupaciones de *n* elementos, formadas por aquellos, están dispuestas linealmente y sin que ninguno haga falta.

El número de permutaciones con repetición que pueden realizarse con **n** elementos, donde existen α_1, α_2, α_3,... α_m elementos iguales entre sí (de una misma clase) y el resto distintos entre sí y distintos también a los anteriores es:

$$P^{n}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \times \alpha_2! \times \ldots \times \alpha_m!}$$

Ejemplo 1. Calcular las permutaciones de 10 elementos, en los que uno de ellos se repite en 2 ocasiones y otro se repite en 3 ocasiones:

$$P^{10}_{2,3} = \frac{10!}{2! \times 3!} = 302{,}400$$

Es decir, tendríamos 302,400 formas diferentes de agrupar estos 10 elementos.

Ejemplo 2. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 1, 1, 2, 2, 3?

Solución: $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

Ejemplo 3. ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en línea nueve bolas de las que 4 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?

El orden importa por ser de distinto color, pero hay bolas del mismo color (están repetidas) y además n = k, es decir colocamos 9 bolas en línea y tenemos 9 bolas para colocar:

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$$

Por tanto, tenemos 1260 modos de colocarlas.

COMBINACIONES

CASO 1.- EL ORDEN NO IMPORTA PERO NO SE PUEDEN REPETIR ELEMENTOS.

Vamos a deducir la fórmula basándonos en el Caso 1.

Tomamos las $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ posibilidades y las partimos en clases, de forma que en cada clase estén aquellas elecciones que sean la misma salvo el orden.

Como he escogido k elementos, la forma de ordenarlos será k! y, así, en cada clase tendré exactamente k! casos.

Por tanto, el número de clases, es decir, el número de posibilidades de escoger k elementos sin importar el orden y sin repetir será

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Este número suele conocerse como el número de combinaciones de *n* elementos tomadas de *k* en *k* y se denota por:

$$C_{n.k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Se llama *combinaciones de n elementos tomados de k en k* (*k* $\leq$ *n*) a todas las clases posibles que pueden hacerse con los *n* elementos de forma que:

- Cada agrupación está formada por *n* elementos distintos entre sí
- Dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, sin tener en cuenta el orden.

Ejemplo 1. Un alumno decide rendir tres de los cinco exámenes finales ¿De cuántas maneras distintas puede elegir esas tres pruebas?

Solución: $$C_{5,3}=\frac{5!}{3!\times 2!}=10$$

Ejemplo 2. ¿Cuántas combinaciones de 6 aciertos existen en la lotería primitiva?

$$C_{49,6}=\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!(49-6)!}=13{,}983{,}816$$

Es decir, que tendríamos que echar 13’983,816 apuestas de 6 números para tener la seguridad al 100% de que íbamos a acertar.

Ejemplo 3. ¿Cuántos grupos de 5 alumnos pueden formarse con los treinta alumnos de una clase? (Un grupo es distinto de otro si se diferencia de otro por lo menos en un alumno)

No importa el orden (son grupos de alumnos). No puede haber dos alumnos iguales en un grupo evidentemente, luego sin repetición.

$$C_{30,5}=\binom{30}{5}=\frac{30!}{5!(30-5)!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25!}{5!\cdot 25!}=142{,}506$$

Por tanto, se pueden formar 142,506 grupos distintos.

En general, calcular $\binom{n}{k}$ por la fórmula anterior implica calcular varios factoriales, lo que hace que no sea muy útil en la práctica. Un método alternativo viene dado por las siguientes propiedades:

Proposición.

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Criterios de Divisibilidad

Sea **x** un número entero escrito en base diez. Entonces **x** es divisible por:

- **2** si su última cifra es un 0 (cero) o un número par (2,4,6,8).
- **3** si la suma de todas sus cifras da como resultado múltiplo de 3. Ej: 387 es divisible por 3 porque 3+8+7= 18 y 18 es múltiplo de 3.
- **4** si sus dos últimas cifras (decenas y unidades) son múltiplos de 4. Ej: 348 y 1828.
- **5** si el número termina en 0 ó 5.
- **6** si el número es divisible por 2 y por 3 a la vez.
- **7**: Existen dos criterios para este número.
    - <u>Método directo</u>: Se agrupan las cifras de tres en tres, y luego calcular la *suma alterna* (esto es, cambiando el signo a cada número). Si el resultado es divisible por 7, el número es divisible por 7.

      Ejemplo: x = 943 120 403 788 521 → 521 - 788 + 403 - 120 + 943 = 959 que es múltiplo de 7, por lo tanto x también.

    - <u>Método recursivo</u>: Se separa el número en dos, donde el primero está formado por todas las cifras salvo la más a la derecha, y el otro formado por dicha cifra. Se multiplica el segundo número por 2 y se resta al primero. Si el valor absoluto del resultado es 0 o divisible por 7, el número entero es divisible por 7. Suele repetirse el proceso hasta obtener un número de una cifra y, si éste es 0 ó 7, el número es divisible por 7.

      Ejemplo: x = 95**9** → (95 - (9 x 2)) → 7**7** → (7 - (7 x 2)) → -7. Como termina en 7, x es divisible por 7.

- **8** si el número formado por las tres últimas cifras lo es. Se puede remplazar la cifra de los miles por 0 si es par o por 1 si es impar (es decir, se puede reducir módulo 2), y disminuir la cifra de las decenas de 4 u 8 (reducir módulo 4).

  Ejemplo: x = 345 065 186 576 → 576 → 136 que es divisible por 8, así que x también.

- **9** si la suma de todas sus cifras, descartando los 9 y los 0, es múltiplo de 9.
- **10** si la última cifra es un 0 (cero)
- **11** para saber podemos hacerlo de esta manera: sumamos los lugares impares y por otra parte los pares. Una vez obtenido los resultados de ambos, se restan. Si el resultado de todo esto te da múltiplo de 11 eso quiere decir que ese nº es divisible por 11. Ej: 979= (9 + 9) - 7=18 - 7= 11
- **12** si lo es por 3 y 4.
- **13**: Regla parecida a la del 7: se mira si la *suma alterna* es divisible por 13.

Ejemplo: x = 23 410 456 970 550 → 550 - 970 + 456 - 410 + 23 = - 351 que es múltiplo de 13, luego x también.
Existe también un método recursivo para este número similar al del 7, sólo que multiplicando la cifra más a la derecha por 9 en vez de por 2.

- **14** si es par y divisible por 7.
- **15** si lo es por 3 y 5 a la vez.
- **16** si lo es el número formado por sus cuatro últimas cifras, pudiéndose reducir módulo 2 la primera (a la derecha) y módulo 4 la segunda:

  Ejemplo: x = 345 999 106 592 → 6592 → 0112 que es divisible por 16, así que x también.

- **17**: Se separan los dos últimos números y se restan a la parte izquierda, antes de restar la cifra se multiplica por 2. Si el resultado es divisible por 17, el número es divisible por 17.

  Ejemplo: x = 871 25 → 2*871 - 25 = 1717 que es múltiplo de 17.
  Otro método consiste en multiplicar la última cifra de la derecha por 5, y restárselo a la parte izquierda. Si el resultado es divisible por 17, el número es divisible por 17.
  Ejemplo: x = 7 08 60 25 → 25 - 60 + 08 - 7 → - 34 que es múltiplo de 17, luego x también.

- **18** si lo es por 2 y 9.
- **19** si la suma de las unidades por 2 más las decenas es múltiplo de 19, un ejemplo: 19 x 8 = 152 → 2*2 = 4 + 15 = 19 (JIM)